D. Pernoux
http://perso.wanadoo.fr/pernoux

PREMIER VOLET

Exercice 1

1°) Le plus petit nombre N possible est **4321**.

2°) Le plus grand nombre possible est **9876**.

3°) Liste des nombres N pour lesquels le chiffre des milliers est 6 :
6543 6542 6541 6532 6531 6521 6432 6431 6421 6321

4°) D = N – N' = (1000m + 100c + 10d + u) – (1000u + 100d + 10c + m) = **999m +90c –90d – 999u**

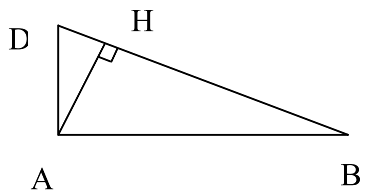
5°) D = 9 × [111(m-u) +10(c-d)]
Or, m-u et c-d sont des entiers naturels (rappel : m>u et c>d). Donc 111(m-u) +10(c-d) est un entier naturel. Donc **D est un multiple de 9**.

6°) D = 999(m-u) + 90(c-d)
m-u varie entre 3 et 8 et c-d varie entre 1 et 6.
Si on peut avoir en même temps m-u = 8 et c-d = 6, alors D sera maximum. C'est bien le cas lorsque m=9 et c=8 et d=2 et u=1 et il n'y a pas d'autre possibilité.
La **valeur maximale de D** est (999)×8 + 90×6 soit **8532**.
D est maximum lorsque N = 9821.

7°) Si on peut avoir en même temps m-u = 3 et c-d = 1, alors D sera minimum. C'est bien le cas, par exemple, lorsque m=9 et c=8 et d=7 et u=6 mais il y a d'autres possibilités.
La **valeur minimale de D** est (999)×3 + 90×1 soit **3087**.
D est minimum lorsque N=9876 ou N=8765 ou N=7654 ou N=6543 ou N=5432 ou N=4321.

Exercice 2

1°)



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD permet d'écrire :
$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (en cm²)
Donc BD = 5 (en cm)

Si on appelle H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse, on peut calculer l'aire du triangle rectangle ABD de deux manières :

Première manière :
Aire (ABD) = (AB × AD) / 2 = 6

Deuxième manière :
Aire (ABD) = (AH × DB) / 2

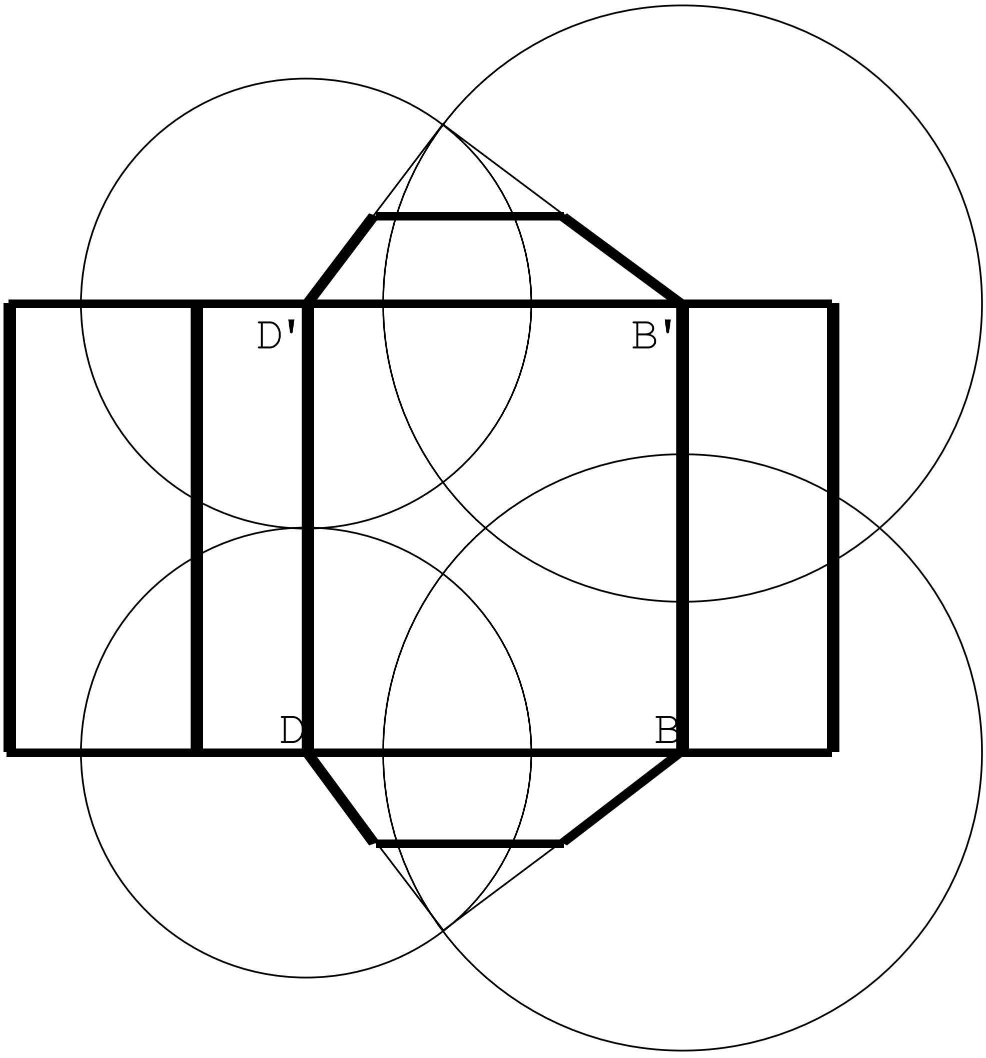
On en déduit que AH × DB = 12 donc que AH = 12 / 5 = 2,4 (en cm)
La hauteur du triangle ABD relative à l'hypoténuse vaut 2,4 cm.

2°)
a)
Etude de la face BDIJ

La face BDIJ est un trapèze car, d'après la réciproque du théorème de Thalès (cas particulier appelé souvent théorème des milieux), les droites (IJ) et (DB) sont parallèles.
Remarque De plus, on sait que, dans ce cas, IJ = BD/2.
Dimensions de la face BDIJ :
BD = 5 (en cm) (voir 1°)
IJ = DB/2 = 5/2 = **2,5 (en cm)**
ID = 1,5 (en cm) car I est le milieu de [AD] et car AD = 3 (en cm)
JB = 2 (en cm) car J est le milieu de [AB] et car AB = 4 (en cm)

Etude de la face DBB'D
La droite (DD') est orthogonale au plan (ABCD) et au plan (A'B'C'D'). Elle est donc perpendiculaire à la droite (DB) et perpendiculaire à la droite (D'B').
La droite (BB') est orthogonale au plan (ABCD) et au plan (A'B'C'D'). Elle est donc perpendiculaire à la droite (DB) et perpendiculaire à la droite (D'B').
La face DBB'D' est un quadrilatère qui quatre angles droits et **est donc un rectangle.**
Dimensions de la face DBD'B':
BD = B'D'=5 (en cm) (voir 1°)
BB' = DD' = 6 (en cm)

b)



c) Le volume cherché est égal à l'aire du trapèze BDIJ multipliée par la longueur AA' (d'après la formule qui donne le volume d'un prisme droit).

Calcul de l'aire du trapèze BDIJ :
Soit H le pied de la hauteur du triangle (ABD) issue de A. La hauteur du trapèze BDIJ est égale à HH' si on appelle H' le point d'intersection des droites (AH) et (IJ). Or, d'après le théorème de Thalès, AH'/AH = 1/2. Donc H' est le milieu de [AH].
Donc HH' = AH/2 = 2,4 / 2 = 1,2 (en cm) (voir 1°)
L'aire du trapèze BDIJ est égale à 1/2 × (IJ + DB) × HH' (d'après la formule donnant l'aire d'un trapèze).
Donc : Aire (BDIJ) = 1/2 × (2,5 + 5) × 1,2 = 4,5 (en cm²)

Calcul du volume du compartiment :
Le volume cherché est égal à 4,5 × 6 soit 27 (en cm^3).

<u>**Analyse de travaux d'élèves**</u>

1°)
Annexe A

La figure tracée par l'élève est bien superposable à la figure initiale. La notion de retournement liée à la notion de symétrie axiale semble acquise mais la figure tracée par l'élève peut être obtenue par pliage non pas par rapport au «grand trait » mais par rapport à une droite parallèle à celui-ci. La difficulté rencontrée peut provenir du fait que le polygone initial a un côté confondu avec l'axe de symétrie.

Annexe B

La figure tracée par l'élève est bien superposable à la figure initiale. Ce qui semble acquis c'est la capacité à reproduire un modèle «à l'envers» sur un quadrillage mais la figure tracée n'est pas l'image de la figure donnée dans une symétrie axiale mais dans une rotation de 180 ° (appelée aussi symétrie centrale).

Annexe C

La figure construite n'est pas superposable à la figure initiale. L'idée de retournement est présente mais l'élève semble avoir tracé les segments de proche en proche (en utilisant les déplacements dans deux directions sur le quadrillage) sans tenir compte de «l'allure générale» de la figure.

Annexe D

La figure construite «touche bien l'axe de symétrie au bon endroit» mais elle n'est pas superposable à la figure initiale. L'élève semble avoir voulu tracé trois segment en décalant de cinq carreaux vers le bas trois des segments de la figure initiale puis avoir voulu «fermé le contour» obtenu. Par ailleurs, les tracés sont imprécis : le quadrillage ne semble pas vraiment perçu comme une aide pour le tracé et la règle est mal positionnée.

2°)

a) La notion mathématique sous-jacente est la notion de symétrie orthogonale par rapport à une droite (ou symétrie axiale)

b) On peut citer deux autres transformations géométriques qui apparaissent au travers de ces productions :
- la rotation de 180° (ou symétrie centrale) pour l'annexe B
- la translation (de 5 carreaux vers le bas) pour l'annexe D (mais seule une partie de la figure initiale est transformée et ce de façon pas très précise).

DEUXIÈME VOLET

1°) L'objectif visé est l'approche de la notion de proportionnalité.

2°) Au cycle 3.
(Compétence à acquérir au cycle 3 : résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant des raisonnements personnels appropriés)
Remarque: la compétence citée dans ce corrigé est la compétence figurant dans le programme actuel

3°) Activité A

Objectif spécifique visé : comprendre que le « grossissement » d'un objet correspond à une relation fonctionnelle où on passe des dimensions de l'objet initial aux dimensions de l'objet grossi en multipliant toujours par un même nombre.

Acquis supposé des élèves :
- savoir multiplier un nombre entier à deux chiffres par un nombre entier à un chiffre.
- savoir lire un tableau.

Procédure de résolution à laquelle peut s'attendre l'enseignant : calcul de 14 fois 5 pour trouver la longueur de l'objet grossi en mm.

Activité B

Objectif spécifique visé : introduire la notion de proportionnalité en comparant le coût de deux modèles d'objets dans des situations où le prix est proportionnel à la quantité.

Acquis supposé des élèves :
- savoir comparer des entiers
- savoir effectuer une multiplication
- savoir effectuer une division exacte.

Procédures de résolution à laquelle peut s'attendre l'enseignant :
1 Comparaison des nombres de bols pour un même prix (on choisit la proposition permettant d'avoir le plus de bols pour un même prix)
2 Comparaison des prix des verres pour un même nombre de verres (on choisit la proposition la moins chère)
3 Première possibilité (conclusion directe) : on choisit la proposition qui coûte le moins cher et qui en même temps permet d'avoir le plus de vases
Deuxième possibilité : on se ramène à la même quantité de vases et on compare les prix
4 Première possibilité : calcul du coût d'une assiette
Deuxième possibilité : on se ramène à la même quantité d'assiettes et on compare les prix.

Activité C

Objectif spécifique visé : résoudre un problème de proportionnalité composée faisant intervenir trois grandeurs.

Acquis supposé des élèves :
- savoir lire un tableau.
- savoir multiplier des nombres entiers

Procédures de résolution à laquelle peut s'attendre l'enseignant :
Première possibilité : calcul du coût d'une boîte (8×5) puis du coût de 4 boîtes (4×40)
Deuxième possibilité : calcul du nombre total de feutres (4×8) puis du coût total (32 x 5)

Activité D

Objectifs spécifiques visés :
- Utiliser les propriétés de linéarité dans une situation où un prix est proportionnel à une quantité
- Différencier une situation de proportionnalité d'une situation de non-proportionnalité.

Acquis supposé des élèves :
- savoir lire un tableau (où les prix sont donnés «par intervalles »)
- connaître la relation en franc et centime
- savoir multiplier
- savoir ajouter des décimaux

Procédures de résolution à laquelle peut s'attendre l'enseignant :
I : Calcul des prix de 5 photocopies et de 9 photocopies en utilisant des multiplications par 75
Calcul des prix de 14 photocopies et 90 photocopies en utilisant d'une part des multiplications par 75 et d'autre part les propriétés de linéarité (respectivement pour l'addition et pour la multiplication par un nombre)

II – 1 : Repérage du prix unitaire en fonction du nombre de photocopies ; calcul du coût de 25 photocopies (25 x 60) ; calcul des coûts en centimes de 9 photocopies (9×80) et de 15 photocopies (15×70) et transformations en francs; calcul du coût de 25 photocopies en centimes (25 x 60)
II – 2 : Comparaison de $4{,}25 + 7{,}20$ avec $14 \times 0{,}70$
III – 3 : Comparaison de $10 \times 7{,}20$ avec 90×0.60

Activité E

Objectif spécifique visé :
Dans une situation où un prix est proportionnel à une quantité calculer le prix unitaire puis le prix d'une quantité en utilisant soit le prix unitaire (coefficient de proportionnalité) soit les propriétés de linéarité.

Acquis supposé des élèves :
- savoir effectuer une division exacte
- savoir additionner des nombres entiers
- savoir multiplier des nombres entiers.

Procédure de résolution à laquelle peut s'attendre l'enseignant :
Calcul des prix unitaires en effectuant des divisions ; calcul des prix de 12 bols et de 14 bols en utilisant d'une part des multiplications par 24 et d'autre part les propriétés de linéarité (respectivement pour l'addition et pour la multiplication par un nombre).

4°) Plusieurs rangements chronologiques sont possibles.
Voici une proposition :

1°) Activité B (approche de la notion de proportionnalité dans un contexte « parlant » pour l'élève et ne faisant pas immédiatement appel à des calculs)
2°) Activité E (situation permettant de faire apparaître les propriétés de linéarité qui aident à donner du sens au concept de proportionnalité)
3°) Activité A (situation introduisant une représentation sous forme de tableau)
4°) Activité D (situation faisant apparaître une situation de non-proportionnalité avec lecture d'un tableau donnant un prix « par intervalles »)

5°) Activité C (situation complexe faisant intervenir trois grandeurs).

4°)
Pour approfondir la notion abordée, l'enseignant peut
- jouer sur la nature des nombres exprimant les prix en francs (qui peuvent être des décimaux) et la taille de ces nombres
- jouer en même temps sur le rapport entre les nombres d'objets (ou entre les prix) et sur les prix unitaires : l'utilisation de prix unitaires exprimés par des nombres décimaux ou même par des nombres rationnels non décimaux (« 3 bols coûtent 20 F »), associée à l'utilisation de rapports entre les nombres d'objets (ou entre les prix) égaux à des nombres entiers, amène à utiliser les propriétés de linéarité.

5°) Aides possibles **:**

Pour la question 2 :
Demander aux élèves de comparer le coût de 14 photocopies payées en une seule fois et le coût total de 14 photocopies payées en deux fois (5 un jour et 9 le lendemain).

Pour la question 3 :
Demander aux élèves de calculer le prix unitaire d'une photocopie quand on fait faire 9 photocopies et le prix unitaire d'une photocopie quand on fait faire 90 photocopies.

6°)
L'exercice A est un problème de proportionnalité faisant intervenir deux grandeurs de même nature (deux longueurs). Le coefficient de proportionnalité est un nombre.

L'exercice C est un problème de proportionnalité composée faisant intervenir trois grandeurs. De plus ces grandeurs ne sont pas de même nature (nombre de boîtes, nombre de feutres, prix). Les coefficients de proportionnalité ne sont pas des nombres mais des grandeurs-quotients (nombre de feutres par boîte et prix par feutre)

7°) Proposition de réponse :

Il y a des situations où je peux dire :
J'achète 5 kg de pommes ; je paie 12 .
Si j'achetais trois fois plus de pommes (15 kg), je paierais trois fois plus (36).
On dit alors que le prix des pommes est proportionnel au nombre de pommes.

Il y a des situations où je ne peux pas dire la même chose :
Je joue 20 mn au foot ; je marque 3 buts.
~~Si je jouais trois fois plus longtemps au foot (60 mn) ; je marquerais trois fois plus de buts (9).~~
On dit que le nombre de buts marqués n'est pas proportionnel à la durée de la partie.