**Année 2007-2008**
**Concours blanc n°2 organisé par l'IUFM d'Alsace**
**Proposition de corrigé du sujet de mathématiques**

Le sujet est disponible à cette adresse :
http://pernoux.perso.orange.fr/sujcb20708.pdf

## Exercice 1

1°) La question posée revient à demander si les suites de nombres apparaissant dans les cases grisées sont proportionnelles.

$\frac{20,1}{27,6} \approx 0,73$ (valeur arrondie à 0,01 près)

$\frac{8,4}{12,9} \approx 0,65$ (valeur arrondie à 0,01 près)

$\frac{2,8}{3,6} \approx 0,78$ (valeur arrondie à 0,01 près)

$\frac{1,2}{1,6} = 0,75$

Ces rapports ne sont pas égaux donc les pourcentages des différentes catégories parmi les filles ne sont pas proportionnels aux pourcentages des catégories correspondantes parmi les garçons.

Remarque : il suffit de calculer deux des rapports et de constater qu'ils sont différents pour conclure.

2°)

a)

| Niveau | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de jeunes de ce niveau | $\frac{6,7}{100} \times 522\,148$ $\approx 34\,984$ | $\frac{29,1}{100} \times 522\,148$ $\approx 151\,945$ | $\frac{11,7}{100} \times 522\,148$ $\approx 61\,091$ | $\frac{52,5}{100} \times 522\,148$ $\approx 274\,128$ |

| Niveau | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de jeunes en grave difficulté | $\frac{25,3}{100} \times 34\,984$ $\approx 8\,851$ | $\frac{11,1}{100} \times 151\,945$ $\approx 16\,866$ | $\frac{3,2}{100} \times 61\,091$ $\approx 1\,955$ | $\frac{1,4}{100} \times 274\,128$ $\approx 3\,838$ |

b)

| Niveau | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Pourcentage de jeunes en grave difficulté par rapport à la population totale | 1,7<br><br>Explication :<br>$\frac{8\,851}{522\,148} \approx 0,017$<br>soit 1,7%<br><br>Ou bien :<br>$\frac{25,3}{100} \times 6,7\% \approx 1,7\%$ | 3,2<br><br>Explication :<br>$\frac{16\,866}{522\,148} \approx 0,032$<br>soit 3,2%<br><br>Ou bien :<br>$\frac{11,1}{100} \times 29,1\% \approx 3,2\%$ | 0,4<br><br>Explication :<br>$\frac{1\,955}{522\,148} \approx 0,004$<br>soit 0,4%<br><br>Ou bien :<br>$\frac{3,2}{100} \times 11,7\% \approx 0,4\%$ | 0,7<br><br>Explication :<br>$\frac{3\,838}{522\,148} \approx 0,007$<br>soit 0,7%<br><br>Ou bien :<br>$\frac{1,4}{100} \times 52,5\% \approx 0,7\%$ |

3°)

Relations liant x et y :

$$\begin{cases} x + y = 34\,984 \\ \frac{27,6}{100}x + \frac{20,1}{100}y = 8\,851 \end{cases}$$

La première équation traduit le fait que la somme du nombre x de garçons ayant un niveau 1 d'études et du nombre y de filles ayant un niveau 1 d'études est égal au nombre de jeunes ayant un niveau 1 d'études (nombre égal à 34 984 ; voir 2°a)

La deuxième équation traduit le fait que la somme du nombre de garçons ayant un niveau 1 d'études et en grave difficulté en lecture (nombre qui est égal à 27,6 % du nombre de garçons ayant un niveau 1 d'études d'après l'énoncé et donc qui est égal à 27,6/100 × x) et du nombre de filles ayant un niveau 1 d'études et en grave difficulté en lecture (nombre qui est égal à 20,1 % du nombre de filles ayant un niveau 1 d'études d'après l'énoncé et donc qui est égal à 20,1/100 × y) est égal au nombre total de jeunes ayant un niveau 1 d'études et en grave difficulté en lecture (nombre égal à 8851; voir 2°a)

soit :

$$\begin{cases} x + y = 34\,984 \\ 27,6x + 20,1y = 885100 \end{cases}$$

Calcul de x (par combinaison des deux équations) : 20,1x - 27,6x = 20,1 × 34 984 - 885 100

- 7,5x = - 181 921,6

$$x = \frac{-181921,6}{-7,5} \approx 24256$$

Calcul de y (par combinaison des deux équations) : 27,6y - 20,1y = 27,6 × 34 984 - 885 100

7,5y = 80 458,4

$$y = \frac{80458,4}{7,5} \approx 10728$$

Parmi les jeunes ayant participé à la JAPD en 2001-2002, il y avait 24 256 garçons et 10 728 filles dont le niveau de scolarité était le niveau 1.



D. Pernoux http://pernoux.perso.orange.fr

**Questions complémentaires de l'exercice 1**

1°) La principale notion mathématique abordée dans ce problème est la proportionnalité (la longueur d'un rectangle colorié est proportionnelle au nombre de livres vendus).

2°)
Analyse de la production de Yann

Description :
Pour le jeudi, Yann reporte la hauteur du mardi et ajoute le double de l'écart entre les hauteurs du mardi et du mercredi.
Pour le vendredi, Yann reporte la hauteur du mardi et ajoute le triple de l'écart entre les hauteurs du mardi et du mercredi.
Pour le samedi, Yann reporte la hauteur du mardi puis reporte l'écart entre les hauteurs du mardi et du mercredi.

Raisonnement utilisé :
La procédure utilisée par Yann repose sur le fait que les écarts entre les hauteurs des rectangles sont proportionnels aux écarts entre les nombres de livres correspondant. Dans ce cadre, Yann utilise, de façon implicite, la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre : si l'écart entre deux nombres de livres est multiplié par 2, alors l'écart entre les hauteurs des rectangles doit être multiplié par 2.

Pertinence :
La procédure utilisée est tout à fait pertinente.

Réponses aux questions posées :
Les graphiques sont précis et les façons de procéder clairement explicitées.

Analyse de la production d'Alexis

Description :
Pour le jeudi, Alexis, se réfère à la hauteur du mardi. Il trace un trait plus haut que le trait du mardi.
Pour le vendredi, Alexis se réfère à la hauteur du jeudi. Il trace un trait plus haut que le trait du jeudi.
Pour le samedi, Alexis se réfère à la hauteur du vendredi. Il trace un trait plus bas que le trait du vendredi.

Raisonnement utilisé :
Alexis utilise la même procédure pour les trois graphiques. Exemple pour le jeudi : « 90 est plus grand que 60, donc le trait doit être plus haut ». Il a peut-être compris que puisque 90 c'est 60 plus trois dizaines, il faut ajouter à la hauteur du mardi la hauteur correspondant à trois dizaines (« j'ai ajouté 3 dizaines ») mais il ne sait pas déterminer la hauteur correspondant à trois dizaines (remarque : les longueurs correspondant à trois dizaines ne son pas égales entre elles et celle correspondant à 1,5 dizaine n'est pas égale à la moitié de l'une d'elle)

### Pertinence :

L'ordre est respecté (plus il y a de livres plus la longueur du rectangle est grande) mais la proportionnalité n'est pas respectée.

### Réponses aux questions posées :

Pour le jeudi et le vendredi les graphiques ne sont pas exacts. La hauteur du samedi est exacte mais cela ne signifie pas que le raisonnement effectué soit correct. Il semble que ce soit dû au hasard.
Alexis explique ce qu'il a fait mais ses explications manquent de précision, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il n'utilise pas un raisonnement mettant en jeu la proportionnalité.

## Analyse de la production d'Héloïse

### Description :

Pour le jeudi, Héloïse fait en sorte que la longueur de la bande à laisser en blanc soit égale à la moitié de la longueur de la bande laissée en blanc pour le mardi.
Pour le vendredi, Héloïse fait en sorte que la longueur de la bande à laisser en blanc soit égale à la moitié de la longueur de la bande laissée en blanc pour le jeudi.
Pour le samedi, Héloïse fait en sorte que la longueur de la bande à laisser en blanc soit égale à la longueur de la bande représentant les ventes pour le mercredi.

### Raisonnement utilisé :

Il s'appuie sur le fait que les parties non coloriées des graphiques représentent les compléments à 120 des nombres de livres à représenter.
(remarque : on ne sait pas ce qui permet à Héloïse de dire : « On sait que le maximum de livres qu'il peut vendre est de 120 livres » ; l'a-t-elle trouvé en observant le graphique du mardi ?).
Pour le jeudi et le vendredi, elle utilise un raisonnement basé sur la proportionnalité entre les longueurs des parties non coloriées des graphiques et les complément à 120 des nombres de livres à représenter (Héloïse utilise de façon implicite la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre : la bande non coloriée du jeudi représente deux fois moins de livres que la bande non coloriée du mardi donc la longueur de la bande non coloriée du jeudi est deux fois moins grande que la longueur de la bande non coloriée du mardi).

### Pertinence :

Le raisonnement utilisé est pertinent et s'avère particulièrement efficace pour le samedi.
(il suffit de reproduire le graphique du mercredi « en négatif »)

### Réponses aux questions posées :

Les graphiques sont exacts et les explications sont compréhensibles.

Analyse de la production de Benoît

Description :
Benoît a mesuré la hauteur du mardi puis calculé les hauteurs du jeudi, du vendredi et du samedi.

Pour le jeudi, il a ajouté la hauteur du mardi et la moitié de cette hauteur.
Pour le vendredi, il a ajouté la hauteur du jeudi et le quart de la hauteur du mardi.
Pour le samedi, il a ajouté la hauteur du mardi et le quart de cette hauteur.

Raisonnement utilisé :
Benoît utilise, de façon implicite, les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre.

Pertinence :
Le raisonnement utilisé est pertinent.

Réponses aux questions posées :
Les tracés des rectangles pour le jeudi et le vendredi sont erronés alors que le tracé pour le samedi est exact.
(remarque : le fait que les hauteurs pour le jeudi et le vendredi soient inexactes peut provenir d'erreurs de mesurage, d'erreurs de calcul ou d'un emploi incorrect de la règle graduée lors des tracés)

3°)

Pour le jeudi : le nombre de livres vendus le jeudi est égal au double du nombre de livres vendus le mercredi. La longueur du rectangle pour le jeudi est donc égale au double de la hauteur du rectangle pour le mercredi.
(on utilise la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre)

Pour le vendredi : le nombre de livres vendus le vendredi est égal à la somme des nombres de livres vendus le mardi et le mercredi. La longueur du rectangle pour le vendredi est égale à la somme des longueurs des rectangles pour le mardi et le mercredi.
(on utilise la propriété de linéarité pour l'addition)

Pour le samedi : on mesure la longueur du rectangle pour le mardi. On divise cette longueur par 60 et on multiplie le résultat par 75 pour obtenir la longueur du rectangle pour le samedi.
(on met en avant l'aspect fonctionnel en cherchant la relation qui lie la longueur d'un rectangle au volume de vente correspondant)

**Exercice 2**

1°) Si, le coup suivant, B dit : « 7 + 1 = 8 », A pourra dire ensuite : « 8 + 2 = 10 » et gagner la partie.
Si, le coup suivant, B dit : « 7 + 2 = 9 », A pourra dire ensuite : « 9 + 1 = 10 » et gagner la partie.
A a donc raison de dire : « J'ai gagné ! ».

2°) On a vu a la question précédente qu'un joueur qui arrive à un total de 7 est assuré de pouvoir gagner (il lui suffit de choisir ensuite le complément à 3 du nombre choisi par son adversaire).

De la même manière on peut expliquer qu'un joueur qui arrive à un total de 4 est assuré de pouvoir gagner puisqu'il pourra ensuite arriver à 7 en employant toujours la même tactique (choisir le complément à 3 du nombre choisi par son adversaire).

Si je joueur B commence en disant : « 1 », il est assuré de pouvoir gagner puisqu'il pourra ensuite arriver à 4 puis à 7 puis à 10 en choisissant à chaque fois le complément à 3 du nombre choisi par son adversaire.

Il existe donc bien un nombre permettant au joueur B d'être aussi affirmatif. C'est le nombre 1.

3°) Pour pouvoir être assuré de gagner il faut, dans « la course à 10 par pas de 3 », pouvoir arriver à un total de 6 (ensuite on choisit le complément à 4 du nombre choisi par l'adversaire). Or, pour être sûr de pouvoir arriver à 6, il suffit, si on est le joueur qui commence la partie d'annoncer : « 2 » (on emploie ensuite la même tactique : choisir le complément à 4 du nombre choisi par l'adversaire).

Donc, si le joueur qui commence annonce : « 2 », il est sûr de pouvoir gagner (il suffit de choisir ensuite à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par son adversaire).

4°) Dans « la course à 12 par pas de 3 », des raisonnements analogues à ceux-ci-dessus permettent d'affirmer que, si on arrive à un total de 4, on est sûr de pouvoir gagner (en effet, en choisissant ensuite à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par son adversaire on arrive à 8 puis à 12).

Si B commence en disant « 1 », A pourra dire « 1 + 3 = 4 ».
Si B commence en disant « 2 », A pourra dire « 2 + 2 = 4 ».
Si B commence en disant « 3 », A pourra dire « 3 + 1 = 4 »

Quel que soit le nombre annoncé par B au départ, A pourra donc arriver à un total de 4, puis un total de 8 puis un total de 12 (en choisissant à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par son adversaire).

A met donc toutes les chances de son côté pour gagner.

5°)

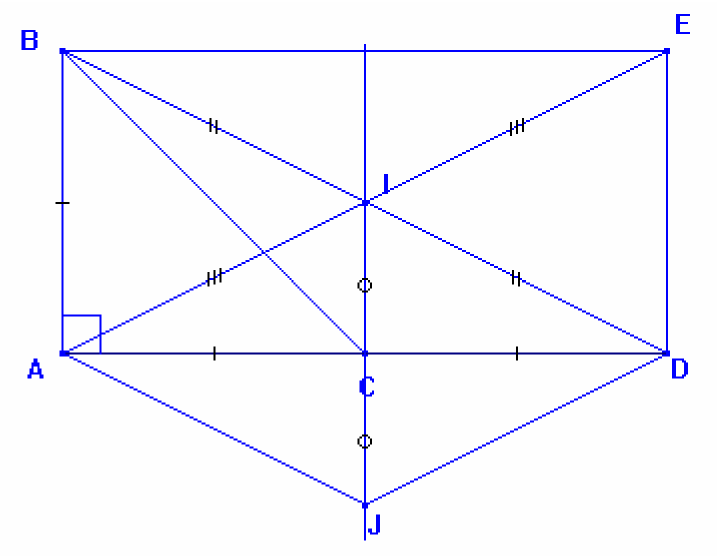
Dans la «course à n par pas de 3 », on est sûr de pouvoir gagner si on peut commencer en annonçant un nombre qui soit de la forme n - 4k (avec k entier) (ensuite, on choisit à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par l'adversaire).

Il faut donc que l'un des nombres 1, 2 et 3 figure parmi les nombres de la forme n - 4k.
C'est le cas lorsque n peut être écrit 4k + 1 ou 4k + 2 ou 4k + 3 (avec k entier) ce qui revient à dire que n n'est pas un multiple de 4.

Si le nombre n n'est pas un multiple de 4, le joueur qui commence a la certitude de gagner s'il joue bien.

**Exercice 3**

1°) On obtient la figure suivante :




2°)
I est le milieu du segment [BD] et C est le milieu du segment [AD].
On en déduit, en utilisant le théorème réciproque du théorème de Thalès, que les droites (CI) et (AB) sont parallèles.
(remarque : on utilise un cas particulier du théorème réciproque du théorème de Thalès qui est souvent appelé « théorème des milieux »)

3°)
Le triangle ABD est un triangle rectangle en A. Or, le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de son hypothénuse. On en déduit que A, B et D appartiennent à un même cercle (C) de centre I, milieu de [BD]
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 8^2 = 80$.
On en déduit que BD = $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ et donc que le rayon du cercle (C) est égal à $2\sqrt{5}$ soit environ 4,5 (en cm).

4°)
IE = IA (car E est le symétrique de A par rapport à I) donc E appartient au cercle de centre I passant par A c'est-à-dire au cercle (C).

Le point I est le milieu de [AE] et le milieu de [BD]. Les milieux des diagonales du quadrilatère ABED sont confondus donc ABED est un parallélogramme.

De plus, AE = BD car [AE] et [BD] sont deux diamètre du même cercle (C).
ABED est donc un rectangle puisque c'est un parallélogramme ayant des diagonales de même longueur.
(remarque : on peut aussi démonter que ABED est un rectangle en disant que c'est un parallélogramme ayant un angle droit)

5°)
Le point C est le milieu de [IJ] et le milieu de [AD]. Les milieux des diagonales du quadrilatère AIDJ sont confondus donc AIDJ est un parallélogramme.

De plus, les droites (AD) et (IJ) sont perpendiculaires ( car (CI) // (AB) et (AB) $\perp$ (AD) ).
AIDJ est donc un losange puisque c'est un parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires.

**Questions complémentaires de l'exercice 3**

1°) Dans les « programmes 2007 », la capacité « tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée » figure parmi les capacités à travailler au cycle 3.
Ce qui rend l'exercice difficile c'est dans un cas que l'axe de symétrie n'est pas une ligne du quadrillage mais une diagonale du quadrillage et dans l'autre cas que les lignes du quadrillage ne sont pas parallèles aux bords de la feuille.
Il me semble qu'on peut accepter les réponses CM1 et CM2.

2°)
Savoir tracer sur papier quadrillé la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.
Savoir utiliser une règle pour tracer un segment.

3°)
Analyse de la situation pédagogique proposée :

Dans chacun des cas, il s'agit de construire sur papier quadrillé la figure symétrique d'un triangle donné, les sommets du triangle étant des nœuds du quadrillage et les côtés du triangle ne coupant pas l'axe de symétrie.

Dans le premier cas, l'axe de symétrie est une diagonale du quadrillage alors que dans le deuxième cas c'est une ligne du quadrillage mais, dans ce deuxième cas, les lignes du quadrillage ne sont pas parallèles aux bords de la feuille.

L'énoncé ne précise pas les instruments autorisés. On peut donc supposer qu'ils le sont tous (règle graduée, équerre, compas). En utilisant le quadrillage et la disposition particulière de l'axe par rapport au quadrillage, la règle non graduée peut suffire dans les deux cas. Cependant l'élève peut se servir de l'équerre pour tracer des perpendiculaires à l'axe et du compas pour reporter des longueurs ou vérifier des égalités de longueurs.

Procédures utilisées par l'élève :

Pour les deux exercices, l'élève ne fait pas une symétrie orthogonale mais une symétrie oblique par rapport à l'axe donné (remarque : toutes les droites déterminées par un point et son image sont parallèles et l'axe de symétrie passe bien par les milieux de tous les segments joignant un point et son image).

Pour l'exercice 1, l'élève utilise pour effectuer la symétrie la direction « verticale » (celle donnée par deux des bords de la feuille).
Remarque : aucune information ne permet de savoir si l'élève a compté les carreaux ou a mesuré pour construire l'image d'un point.

Pour l’exercice 2, l’élève utilise pour effectuer la symétrie « la direction la plus verticale possible » tout en faisant en sorte que les images des sommets du triangle soient situées en des nœuds du quadrillage. Ses tracés sont précis : il suit les diagonales de rectangles déterminés par les lignes du quadrillage dont le rapport de la longueur sur la largeur est 2 et utilise le fait que deux points symétriques l’un de l’autre sont « équidistants » de l’axe, même s’il n’utilise pas correctement la définition de l’équidistance de deux points par rapport à une droite. Cependant, aucune information ne permet de savoir la procédure exacte que l’élève a adoptée pour arriver à ce résultat.

On peut supposer que, pour cet élève, le modèle qu’il a en tête de la symétrie axiale privilégie les axes horizontaux ou verticaux.

4°)
Activités possibles :
- faire comparer par l’élève le résultat de son travail avec le résultat attendu en lui demandant d’expliciter les ressemblances et les différences
- faire représenter ou tracer deux droites perpendiculaires uniquement par pliage sans privilégier l’horizontale et la verticale
- faire tracer par pliage la figure symétrique d’une figure donnée pour faire apparaître le lien entre pliage, symétrie axiale et direction perpendiculaire à l’axe
- donner de nombreux exercices de construction de figures avec l’axe de symétrie non horizontal.

Par ailleurs, l’enseignant peut conseiller à l’élève de penser, dans le futur, à vérifier, par pliage et/ou en utilisant un papier calque, les résultats obtenus. Il peut aussi lui conseiller de vérifier, en utilisant soit la règle graduée soit le compas, l’égalité des longueurs des segments symétriques


*D. Pernoux* http://pernoux.perso.orange.fr