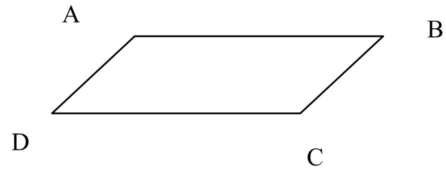
QUELQUES PROPRIETES UTILES POUR BATIR UNE DEMONSTRATION GEOMETRIQUE

Voir aussi ces pages avec applets java : http://perso.wanadoo.fr/pernoux/main.htm#demo

1°) Principe

Considérons les affirmations suivantes :



P1 : $(AB) /\!/ (DC)$ et $(AD) /\!/ (BC)$
P2 : $(AB) /\!/ (DC)$ et $AB = DC$
P3 : $AB = DC$ et $AD = BC$
P4 : $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu

On démontre que chacune de ces affirmations, prise isolément, est équivalente à l'affirmation P suivante : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Bien comprendre ce que ceci signifie : dire que l'affirmation P3 est équivalente à l'affirmation « le quadrilatère ABCD est un parallélogramme » c'est, non seulement, dire, que, pour tout parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur deux à deux mais c'est aussi dire que tout quadrilatère qui a des côtés opposés de même longueur deux à deux est un parallélogramme.

Bâtir une démonstration va consister à enchaîner des propriétés :
si, à un certain moment, on sait, par exemple, que P3 est vérifiée (autrement dit si on sait que $AB = DC$ et $AD = BC$), on pourra en déduire que ABCD est un parallélogramme. A l'étape suivante, on pourra en déduire que P1, par exemple, est vérifiée, autrement dit que $(AB) /\!/ (DC)$ et $(AD) /\!/ (BC)$.

La démonstration aura donc consisté à enchaîner deux théorèmes :

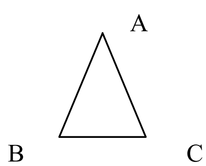
Premier théorème ($P3 \Rightarrow P$) : si un quadrilatère a des côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Deuxième théorème ($P \Rightarrow P1$) : si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Il est donc important de connaître pour diverses figures élémentaires une liste de propositions équivalentes

2°) Listes de propositions équivalentes

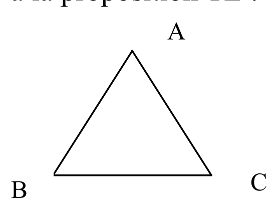
a) Liste de propositions équivalentes à la proposition TI : « Le triangle ABC est isocèle de sommet A »

TI1 : $AB = AC$
TI2 : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$



b) Liste de propositions équivalentes à la proposition TE : « Le triangle ABC est équilatéral »

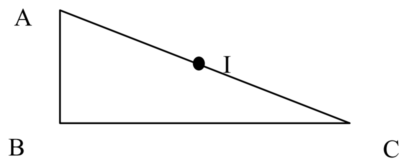
TE1 : $AB = AC = BC$
TE2 : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$
TE3 : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 60°$



D. Pernoux
http://pernoux.perso.orange.fr

c) Liste de propositions équivalentes à la proposition TR : « Le triangle ABC est un triangle rectangle en B »

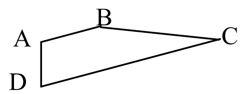
TR1 : $\widehat{ABC} = 90°$
TR2 : $AC^2 = AB^2 + BC^2$
TR3 : I est le milieu de [AC] et IA = IB = IC



Remarques :
Le théorème « $TR \Rightarrow TR2$ » est le théorème de Pythagore.
Le théorème « $TR2 \Rightarrow TR$ » est le théorème réciproque du théorème de Pythagore
Le théorème « $TR \Rightarrow TR3$ » exprime le fait que si un triangle ABC est rectangle en B alors le cercle de diamètre [AC] passe par B.
Le théorème « $TR3 \Rightarrow TR$ » exprime le fait que si [AC] est un diamètre d'un cercle et B un point de ce cercle alors le triangle ABC est rectangle en B

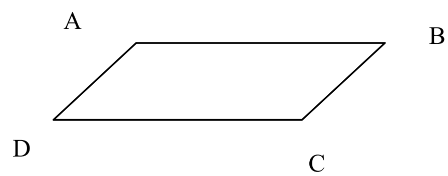
d) Proposition équivalente à la proposition T : « Le quadrilatère ABCD est un trapèze »

T1 : $(AB) \parallel (DC)$



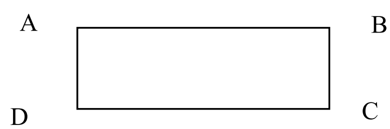
e) Liste de propositions équivalentes à la proposition P : « Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme »

P1 : $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$
P2 : $(AB) \parallel (DC)$ et AB = DC
P3 : AB = DC et AD = BC
P4 : [AC] et [BD] ont même milieu



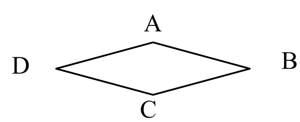
f) Liste de propositions équivalentes à la proposition R : « Le quadrilatère ABCD est un rectangle »

R1 : Les angles de ABCD sont des angles droits
R1 : ABCD est un parallélogramme et $\widehat{ADC} = 90°$
R2 : ABCD est un parallélogramme et AC = DB



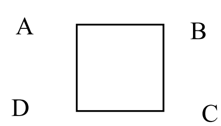
g) Liste de propositions équivalentes à la proposition L : « Le quadrilatère ABCD est un losange »

L1 : AB = BC = CD = DA
L2 : ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (DB)$



h) Liste de propositions équivalentes à la proposition C : «Le quadrilatère ABCD est un carré»

C1 : ABCD est un rectangle et ABCD est un losange
C2 : AB = BC = CD = DA et BAD = 90°



i) Liste de propositions équivalentes à la proposition PR : « Le polygône P est un polygône régulier »

PR1 : Tous les côtés de P ont même longueur et tous ses angles sont égaux
PR2 : P est inscriptible dans un cercle et tous les angles au centre déterminés par les segments joignant le centre du cercle à deux sommets succesifs sont égaux.