Multiples, diviseurs, PPCM (Plus Petit Commun Multiple) et PGCD (Plus Grand Commun Diviseur)

1°) Remarque préalable : ce qui est dit ici concerne les nombres entiers positifs (mais ne pas oublier que les multiples de 3 sont les nombres ..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...)

2°) Multiples et diviseurs : a est un multiple de b si a peut être écrit kb avec k entier. On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemples :

Multiples de 3 (positifs) : 3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33, **36**, …
Multiples de 4 (positifs) : 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40, 44, …
Multiples communs à 3 et 4 (positifs) : 12, 24, 36, …
PPCM de 3 et 4 : 12

Remarque : les multiples communs à deux nombres sont les multiples de leur PPCM. Dans des exercices on où cherche des multiples communs à deux nombres on peut, même si l'énoncé ne demande pas de trouver le plus petit d'entre eux, chercher le PPCM des deux nombres car ensuite on peut dire que les multiples communs aux deux nombres sont les multiples de ce PPCM.

Diviseurs de 21 : **1**, **3**, 7, 21 (pour la recherche des diviseurs voir 6°)
Diviseurs de 12 : **1**, 2, **3**, 4, 6, 12
Diviseurs communs à 12 et 21 : 1, 3
PGCD de 12 et 21 : 3

Remarque : les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD. Dans des exercices on où cherche des diviseurs communs à deux nombres on peut, même si l'énoncé ne demande pas de trouverle plus grand d'entre eux, chercher le PGCD des deux nombres car ensuite on peut dire que les diviseurs communs aux deux nombres sont les diviseurs de ce PGCD.

3°) Méthodes pour trouver le PGCD (exemple avec 84 et 270) :

La première méthode peut être généralisée et utilisée quand on cherche le PGCD de plus de deux nombres.

a) Première méthode (utilisant les décompositions de 84 et 270 en produits de nombres premiers):
$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times 7$
$270 = 2 \times 135 = 2 \times 3 \times 45 = 2 \times 3 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{2} \times \mathbf{3^3} \times 5$
PGCD (84 , 270) = 2 × 3 = 6
(on ne prend que **les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux** décompositions et on les affecte du plus **petit** exposant)

Remarque : pour une recherche en ligne de la décomposition d'un nombre en un produit de nombres premiers, voir : http://ww3.ac-poitiers.fr/math/prof/resso/cali/premiers.html

b) Deuxième méthode (algorithme d'Euclide) :

On effectue la division euclidienne de 270 par **84**.
On trouve un quotient qui vaut 3 et un reste qui vaut **18**.
PGCD(270 , 84) = PGCD(84 , 18)

On effectue la division euclidienne de 84 par **18**.
On trouve un quotient qui vaut 4 et un reste qui vaut **12**.
PGCD(84 , 18) = PGCD(18 , 12)

On effectue la division euclidienne de 18 par **12**.
On trouve un quotient qui vaut 1 et un reste qui vaut **6**.
PGCD(18 , 12) = PGCD(12 , 6)

On effectue la division euclidienne de 12 par **6**.
On trouve un quotient qui vaut 2 et un reste qui vaut 0.
PGCD(12,6) = 6

4) Méthodes pour trouver le PPCM (exemple avec 84 et 270) :

La première méthode peut être généralisée et utilisée quand on cherche le PPCM de plus de deux nombres.

a) Première méthode (utilisant les décompositions de 84 et 270 en produits de nombres premiers):
$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{7}$
$270 = 2 \times 135 = 2 \times 3 \times 45 = 2 \times 3 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{2} \times \mathbf{3^3} \times \mathbf{5}$
$\text{PPCM}(84 , 270) = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3^3} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7} = 3780$
(On prend **tous les facteurs premiers** qui apparaissent et on les affecte du plus **grand** exposant)

b) Deuxième méthode (utilisable si on a déjà calculé le PGCD)
On utilise le fait que le produit du PPCM par le PGCD est égal au produit des deux nombres de départ.
Exemple :
PPCM(84 , 270) × PGCD(84 , 270) = 84 × 270
PPCM(84 , 270) × 6 = 84 × 270
$$\text{PPCM}(84 , 270) = \frac{84 \times 270}{6} = 3780$$

5°) Compléments (pour éviter de confondre PPCM et PGCD)

On utilise le PPCM de certains nombres quand on s'occupe des multiples communs à ces nombres et qu'on est amené à chercher le plus petit de ces multiples.

Le PPCM de différents nombres est un multiple de chacun de ces nombres et est donc toujours supérieur ou égal à chacun de ces nombres.

On peut utiliser le PPCM quand on a plusieurs fractions et qu'on veut transformer ces fractions pourqu'elles aient toutes le même dénominateur.

Exemples "classiques":

- si on veut paver un carré (dont les côtés mesurent un nombre entier de cm) en juxtaposant des rectangles (tous disposés de la même manière) dont les côtés ont pour longueurs 24 cm et 60 cm et si on demande de chercher quelle est la valeur minimale possible pour la longueur du côté du carré, on cherche le PPCM de 24 et 60 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un multiple à la fois de 24 et 60).

- si on veut remplir un cube (dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm) en juxtaposant des parallélépipèdes (tous disposés de la même manière) dont les côtés ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm et si on demande de chercher quelle est la valeur minimale possible pour la longueur de l'arête du cube, on cherche le PPCM de 24, 40 et 60 car la mesure de la longueur de l'arête du cube en cm doit être un multiple à la fois de 24,40 et 60).

Si on cherche un nombre de taille minimale ayant telle ou telle propriété, on pense plutôt au PPCM.

On utilise le pgcd quand on s'occupe des diviseurs communs à ces nombres et qu'on est amené à chercher le plus grand de ces diviseurs.

Le PGCD de différents nombres est un diviseur de chacun des nombres et est donc toujours inférieur ou égal à chacun des nombres.

Exemples "classiques" :

- si on veut paver un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 24 cm et 60 cm avec des carrés dont les côtés mesurent un nombre entier de cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur du côté du carré, on cherche le PGCD de 24 et 60 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 60 .

- si on veut remplir un parallélépipède dont les arêtes ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm avec des cubes dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur de l'arête du cube, on cherche le PGCD de 24, 40 et 60 car la mesure de la longueur de l'arête du cube en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 60.

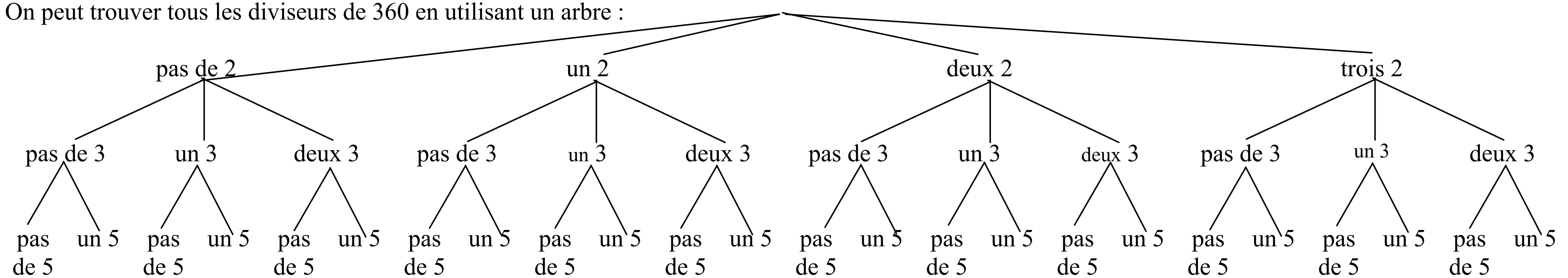
Si on cherche un nombre de taille maximale ayant telle ou telle propriété, on pense plutôt au PGCD.

6°) Remarque concernant la recherche des diviseurs d'un nombre

Exemple : recherche des diviseurs de 360

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

On peut trouver tous les diviseurs de 360 en utilisant un arbre :



1	5	3	15	9	45	2	10	6	30	18	90	4	20	12	60	36	180	8	40	24	120	72	360

Liste des diviseurs de 360 : 1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 15 18 20 24 30 36 40 45 60 72 90 120 180 360

Remarques :

- les diviseurs peuvent être associés deux par deux en mettant ensemble deux diviseurs dont le produit vaut 360 (s'il y avait un nombre impair de diviseurs, le diviseur «du milieu » serait associé avec lui même) :
$1 \times 360 = 360$ $2 \times 180 = 360$ $3\times 120 = 360$ etc.

- l'utilisation d'un arbre permet de comprendre immédiatement que le nombre de diviseurs de 360 est égal à 4×3×2 soit 24 et que, de façon générale, **si la décomposition en un produit de facteurs premiers d'un nombre entier n vaut** $n = p^a \times q^b \times r^c \times ...$ **alors le nombre de diviseurs de n est égal à (a+1)×(b+1)×(c+1)×...**

D. Pernoux http://dpernoux.net

Page avec un applet permettant de construire un arbre et de trouver tous les diviseurs pour les nombres inférieurs ou ®gaux à 1024 (auteur : Bruno Kostrzewa)

http://labomath.free.fr/divers/diviseurs.html (Adresse de la page d'entrée du site : http://labomath.free.fr)

Voir aussi : http://jpm-chabert.club.fr/maths/Lexique/diviseur.html (applet de J.-P. Chabert qui permet de trouver la liste des diviseurs d'un nombre inférieur à 1 000 000 000 000 (Adresse de la page d'entrée du site : http://jpm-chabert.club.fr/maths/index.htm)