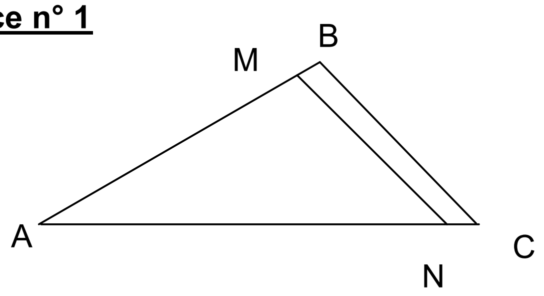
Proposition de corrigé pour le concours blanc n°1 2007-2008 de l'IUFM d'Alsace

Exercice n° 1



D'après le théorème de Thalès, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et, d'après le théorème réciproque du théorème de Thalès, si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

On peut donc affirmer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles si et seulement si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. [Voir remarque concernant cet exercice à la fin de ce corrigé]

Première méthode (réduction au même dénominateur) :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1{,}000\,001}{1{,}000\,002} = \frac{1{,}000\,001^2}{1{,}000\,002 \times 1{,}000\,001} = \frac{(1+000\,001)^2}{1{,}000\,002 \times 1{,}000\,001}$$
$$= \frac{1^2 + 2 \times 1 \times 000\,001 + 0{,}000\,001^2}{1{,}000\,002 \times 1{,}000\,001} = \frac{1 + 0{,}000\,002 + 0{,}000\,000\,000\,001}{1{,}000\,002 \times 1{,}000\,001}$$
$$= \frac{1{,}000\,002\,000\,001}{1{,}000\,002 \times 1{,}000\,001}$$

et

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{1{,}000\,001} = \frac{1{,}000\,002}{1{,}000\,002 \times 1{,}000\,001}$$

$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ **donc les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles**.

Deuxième méthode (utilisation du "produit en croix") :

$$\frac{AM}{AB} \overset{?}{=} \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{1{,}000\,001}{1{,}000\,002} \overset{?}{=} \frac{1}{1{,}000\,001} \Leftrightarrow 1{,}000001^2 \overset{?}{=} 1{,}000002$$

Or $1{,}000\,001^2 = (1 + 0{,}000\,001)^2 = 1 + 2 \times 1 \times 0{,}000\,001 + 0{,}000\,001^2$

Donc $1{,}000\,001^2 = 1 + 0{,}000\,002 + 0{,}000\,000\,000\,001 = 1{,}000\,002\,000\,001$

On en déduit que $1{,}000\,001^2 \neq 1{,}000\,002$.

Donc les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Questions complémentaires (exercice n° 1)

1°)

Activité 1	Activité 2	Activité 3
Quelques réponses possibles (il était demandé deux compétences) : Connaître les propriétés d'un carré (connaissance) Savoir percevoir des égalités de longueur (capacité) Savoir percevoir des angles droits (capacité) Savoir percevoir des égalités d'angles (capacité) Voir remarque concernant cette question à la fin du corrigé.	Quelques réponses possibles (il était demandé deux compétences) : Connaître la signification des mots "milieu" et "carré" (connaissance) Savoir reproduire une figure sur du papier pointé (capacité) Savoir percevoir le milieu d'un segment (capacité) Savoir joindre deux points en traçant un segment avec une règle (capacité) Savoir percevoir et vérifier avec une règle des alignements de points (capacité) Faire preuve de rigueur et de précision dans les tracés (attitude)	Quelques réponses possibles (il était demandé deux compétences) : Savoir tracer des perpendiculaires à une droite donnée passant par un point donné (capacité) Savoir ordonner des actions pour réaliser la construction d'une figure complexe (capacité) Savoir rédiger un programme de construction (capacité) Faire preuve de rigueur et de précision dans les tracés (attitude)

2°)

a) Quelques réponses possibles pour les difficultés prévisibles pour la construction (deux difficultés demandées) :

- Savoir prendre les informations nécessaires pour la reproduction de la figure (alors que celle-ci n'est pas codée)
- Savoir trouver les milieux de [BC], [AB] et [DC] sans règle graduée
- Savoir trouver dans quel ordre réaliser les constructions
- Savoir utiliser les instruments et en particulier l'équerre.

b) Quelques réponses possibles pour les difficultés prévisibles concernant le programme de construction (deux difficultés demandées) :

- Savoir ce qu'est un programme de construction (savoir que c'est un texte qui permet de dessiner la figure sans la voir et donc qu'il faut se mettre à la place de quelqu'un qui ne voit pas la figure)
- Savoir trouver l'ordre des différentes étapes de la construction
- Savoir construire des phrases complexes pour décrire la construction
- Savoir utiliser le vocabulaire géométrique approprié.

c)
Réponses possibles pour les rôles de la règle :

- Permet de vérifier des alignements
- Permet de tracer des segments en joignant deux points.

Réponses possibles pour les rôles de l'équerre :

- Permet de vérifier si un angle est droit
- Permet de tracer une perpendiculaire à un segment passant par un point donné.

Exercice n° 2

$N = \overline{72a83b}$

1°) N est divisible par 45 donc N est divisible par 5 donc b vaut 0 ou 5.
Par ailleurs, N est divisible par 6 donc N est divisible par 2. N est donc un nombre pair et son écriture décimale ne peut pas se terminer par un 5. Donc **b vaut 0.**

2°) N est divisible par 45 donc N est divisible par 9. Donc la somme des chiffres de N est divisible par 9 donc 7 + 2 + a + 8 + 3 + 0 qui vaut 20 + a est divisible par 9. La seule possibilité est que a = 7.
Donc **N vaut 727 830**
Remarque : il est facile de vérifier que 727850 est divisible par 6 et 45

Exercice n° 3

1°)

100 = 13 × 7 + 9 avec 9 < 13 donc **le reste dans la division euclidienne de 100 par 13 vaut 9**.

1001 = 13 × 77 donc **le reste dans la division euclidienne de 1001 par 13 vaut 0**.

26 001 = 13 × 2000 + 1 avec 1 < 13 donc **le reste dans la division euclidienne de 26 001 par 13 vaut 1**.

45 689 = 3514 × 13 + 7 avec 7 < 13 donc **le reste dans la division euclidienne de 45 689 par 13 vaut 7**.

1 456 795 = 112 061 × 13 + 2 donc **le reste dans la division euclidienne de 1 456 795 par 13 vaut 2**.

145 × 2 489 = 360 905 = 27 761 × 13 + 12 donc **le reste dans la division euclidienne de 145 × 2489 par 13 vaut 12**.
$5^3 + 7^8 = 5\,764\,926 = 443\,455 \times 13 + 11$ donc **le reste dans la division euclidienne de** $5^3 + 7^8$ **par 13 vaut 11**.

2°)
Par hypothèse, on a :

a = $13q_1 + r_1$ avec $r_1 < 13$ et b = $13q_2 + r_2$ avec $r_2 < 13$

On en déduit que :
$ab = (13q_1 + r_1) \times (13q_2 + r_2) = 13^2q_1q_2 + 13q_1r_2 + 13q_2r_1 + r_1r_2 = 13(13q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2$

Par ailleurs, soit r le reste dans la division euclidienne de r_1r_2 par 13.
On a alors : $r_1r_2 = 13q + r$ avec $r < 13$.

On en déduit que :
$ab = 13(13q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + 13q + r = 13(13q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1 + q) + r$ avec $r < 13$

Donc **le reste dans la division euclidienne de ab par 13** vaut r et **est donc égal au reste dans la division euclidienne de r_1r_2 par 13**.

Application :

Le reste dans la division euclidienne de 1 456 795 par 13 vaut **2** (voir 1°)
Par ailleurs, 13 011 = 1 000 × 13 + **11** avec 11 < 13 donc le reste dans la division euclidienne de 13 011 par 13 vaut 11.

En appliquant la propriété démontrée dans ce 2°), on déduit que le reste dans la division euclidienne de 1 456 795 × 13 011 par 13 est le même que le reste dans la division euclidienne de 2 x 11 (soit 22) par 13.

Or 22 = 1 x 13 + 9 avec 9 < 13 donc le reste dans la division euclidienne de 2 × 11 par 13 est égal à 9.

Conclusion : **le reste dans la division euclidienne de 1 456 795 × 13 011 par 13 est égal à 9**.

Exercice n° 4

On peut payer toutes les sommes valant n € avec n entier vérifiant $1 \leq n \leq 30$
Explications :

0 pièce de 1 €	0 pièce de 2 €	0 billet de 10€	0 €
		1 billet de 10€	**10 €**
		2 billets de 10€	**20 €**
	1 pièce de 2 €	0 billet de 10€	**2€**
		1 billet de 10€	**12 €**
		2 billets de 10€	**22 €**
	2 pièces de 2 €	0 billet de 10€	**4 €**
		1 billet de 10€	**14 €**
		2 billets de 10€	**24 €**
	3 pièces de 2 €	0 billet de 10€	**6 €**
		1 billet de 10€	**16 €**
		2 billets de 10€	**26 €**
1 pièce de 1 €	0 pièce de 2 €	0 billet de 10€	**1 €**
		1 billet de 10€	**11 €**
		2 billets de 10€	**21 €**
	1 pièce de 2 €	0 billet de 10€	**3 €**
		1 billet de 10€	**13 €**
		2 billets de 10€	**23 €**
	2 pièces de 2 €	0 billet de 10€	**5 €**
		1 billet de 10€	**15 €**
		2 billets de 10€	**25 €**
	3 pièces de 2 €	0 billet de 10€	**7 €**
		1 billet de 10€	**17 €**
		2 billets de 10€	**27 €**

2 pièces de 1 €	0 pièce de 2 €	0 billet de 10€	2 €
		1 billet de 10€	12 €
		2 billets de 10€	22 €
	1 pièce de 2 €	0 billet de 10€	4 €
		1 billet de 10€	14 €
		2 billets de 10€	24 €
	2 pièces de 2 €	0 billet de 10€	6€
		1 billet de 10€	16 €
		2 billets de 10€	26 €
	3 pièces de 2 €	0 billet de 10€	**8 €**
		1 billet de 10€	**18 €**
		2 billets de 10€	**28 €**
3 pièces de 1 €	0 pièce de 2 €	0 billet de 10€	3 €
		1 billet de 10€	13 €
		2 billets de 10€	23 €
	1 pièce de 2 €	0 billet de 10€	**5** €
		1 billet de 10€	15€
		2 billets de 10€	25 €
	2 pièces de 2 €	0 billet de 10€	7€
		1 billet de 10€	17 €
		2 billets de 10€	27 €
	3 pièces de 2 €	0 billet de 10€	**9 €**
		1 billet de 10€	**19 €**
		2 billets de 10€	**29 €**

4 pièces de 1 €	0 pièce de 2 €	0 billet de 10€	4 €
		1 billet de 10€	14 €
		2 billets de 10€	24 €
	1 pièce de 2 €	0 billet de 10€	6 €
		1 billet de 10€	16€
		2 billets de 10€	26 €
	2 pièces de 2 €	0 billet de 10€	8€
		1 billet de 10€	18 €
		2 billets de 10€	28 €
	3 pièces de 2 €	0 billet de 10€	10 €
		1 billet de 10€	20 €
		2 billets de 10€	**30 €**

Question complémentaire (exercice 4)

Elève	**Question 1** Description de la stratégie et validité	**Question 2** Validité de la production écrite et de la réponse	**Question 3** Hypothèses quant aux causes d'erreurs possibles	**Question 4** Message aux parents
Clémence	Calcule la somme dont dispose l'enfant en effectuant des additions. Produit une décomposition additive de cette somme en utilisant un maximum de 5. Compte le nombre de 5. Procédure valide.	Oublie un 2 dans le calcul de la somme ce qui fausse la réponse mais tous les calculs écrits sont justes et la réponse est cohérente avec les calculs faits.	L'oubli d'un 2 peut provenir d'une étourderie.	Clémence a su mettre en œuvre un raisonnement adapté au problème et maîtrise bien les calculs additifs. Par contre elle a commis une étourderie.

Brandon	Constitue des sommes de 5 € en - regroupant deux pièces de 2 € et une pièce de 1 € jusqu'à épuisement des pièces de 2 € - regroupant des pièces de 1 € jusqu'à épuisement des pièces de 1 € - échangeant chaque billet de 10€ contre deux billets de 5 € Procédure valide (le nombre de pièces de 2 € et de 1€ permet la mise en œuvre d'une telle procédure)	Toutes les données de l'énoncé sont prises en compte et les échanges sont pertinents. Les écrits, qui ne sont pas des écrits mathématiques mais des écrits de recherche rendent compte de ces échanges. La réponse est fausse car Brandon se trompe en dénombrant les billets de 5 € obtenus. Remarque : le sigle € est systématique-ment écrit à l'envers.	A peut-être compté le nombre de 5 écrits (qui correspond au nombre de lignes écrites) sans tenir compte du fait que pour les deux dernières lignes l'expression "deux billets de 5 €" entraine "un dédouble-ment du 5".	Brandon a su mettre en œuvre un raisonnement adapté au problème et a su produire des écrits rendant compte de sa recherche. Mais il n'a pas su utiliser ses écrits de recherche pour donner la bonne solution au problème. Par ailleurs, il écrit systématique-ment le symbole € à l'envers.
Ludovic	Représente les données du problème en dessinant les billets et les pièces. Calcule mentalement la somme totale dont dispose l'enfant. Ne sait pas utiliser ce résultat pour répondre à la question posée.	Les dessins correspondent aux données de l'énoncé. La réponse est erronée : Ludovic confond la valeur de la somme totale en euros et le nombre de billets de 5€ nécessaire pour réaliser cette somme.	L'élève n'a peut-être pas compris ce qui était demandé (échanger la somme totale contre des billets de 5€) ou alors il a perdu de vue cet objectif en cours de travail.	Ludovic a su représenter correctement le problème posé en dessinant des billets et des pièces mais il n'a pas su répondre à la question posée (soit parce qu'il n'a pas compris cette question soit parce qu'il a oublié en cours de route ce qui était demandé).
Malika	Calcule la somme totale dont dispose l'enfant en effectuant des calculs mentaux et une addition posée. Décompose additivement	Tout est valide.	Pas d'erreur.	Malika a su parfaitement résoudre le problème complexe proposé.

	cette somme en utilisant uniquement des termes valant 5. Dénombre le nombre de 5 intervenant dans cette décomposition. Procédure valide.			Elle maîtrise bien les calculs additifs.

Voir pages suivantes pour des remarques complémentaires concernant l'exercice 1.

Remarque concernant l'exercice 1 :

Si, pour conclure que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles, on écrit "$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ donc les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles", on utilise la forme contraposée du théorème de Thalès (et pas le théorème réciproque du théorème de Thalès).

Théorème de Thalès :
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Forme contraposée du théorème de Thalès :
Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Théorème réciproque du théorème de Thalès :
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Forme contraposée du théorème réciproque du théorème de Thalès :
Si les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles alors $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Autre exemple :

Théorème n° 1 (vrai) :
Si un homme est français alors cet homme est européen.

Forme contraposée du théorème n° 1 (vrai) :
Si un homme n'est pas européen alors cet homme n'est pas français.

Théorème réciproque du théorème n° 1 (**faux**) :
Si un homme est européen cet homme est français

Forme contraposée du théorème réciproque du théorème n°1 (**faux**) :
Si un homme n'est pas français alors cet homme n'est pas européen.

Remarque concernant la question complémentaire n° 1 de l'exercice n°1 :

Pour une liste des connaissances et capacités,voir, par exemple :

http://dpernoux.free.fr/cycle2.doc

et

http://dpernoux.free.fr/cycle3.doc

Liste des attitudes que l'élève est amené à développer particulièrement à travers la pratique des mathématiques (cycle 2 et cycle 3) :

- la rigueur et la précision dans les tracés, dans les mesures, dans les calculs ;
- le goût du raisonnement ;
- le réflexe de contrôler la vraisemblance des résultats ;
- la volonté de justesse dans l’expression écrite et orale ;
- l’ouverture à la communication, au dialogue, au débat ;
- l’envie de prendre des initiatives, d’anticiper ;
- la curiosité et la créativité ;
- la motivation et la détermination dans la réalisation d’objectifs.

(Source : programmes 2007)