Exemples de résolutions de systèmes de deux équations à deux inconnues

1°) Premier exemple (cas général correspondant au cas où les droites représentant les deux équations sont sécantes) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ -5x - 4y = -18 \end{cases}$$

a) Première méthode : on garde une des deux équations et on remplace l'autre par une combinaison des deux équations faisant disparaître soit x soit y.

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 15y + 8y = -105 + 36 \end{cases}$$

(si appelle L_1 et L_2 les lignes du système précédent cette ligne correspond à la combinaison $5L_1 - 2L_2$)

```
Explication :  5L1 : -10x + 15y = -105
              -2L2 :  10x +  8y =   36
```

La deuxième ligne permet de calculer y : 23 y = -69 soit y = -3.
Ensuite la première ligne permet de calculer x : -2x - 9 = -21 soit -2x = -12 soit x = 6.

Le système admet donc une seule solution : $\begin{cases} x = 6 \\ \text{et} \\ y = -3 \end{cases}$

b) Deuxième méthode : on exprime soit x en fonction de y soit y en fonction de x en utilisant une des deux équations et on garde l'autre équation.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-21+2x}{3} \\ \text{et} \\ -5x - 4y = -18 \end{cases}$$

En « injectant » la formule permettant d'exprimer y en fonction de x (ou x en fonction de y) dans l'équation qu'on a gardée, on obtient une équation permettant de trouver x (ou y) :

$$-5x - 4\frac{-21+2x}{3} = -18 \text{ soit } -15x - 4(-21+2x) = -54$$

$$\text{soit } -15x + 84 - 8x = -54 \text{ soit } -23x = -138 \text{ soit } x = \frac{-138}{-23} \text{ soit } x = 6.$$

On trouve ensuite la valeur de l'autre inconnue : $y = \dfrac{-21+12}{3} = -3$

Le système admet donc une seule solution : $\begin{cases} x = 6 \\ \text{et} \\ y = -3 \end{cases}$

2°) Deuxième exemple (premier cas particulier correspondant au cas où les deux droites représentant les équations sont confondues) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 63 \end{cases}$$

a) Si on utilise la première méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 0y = 0 \end{cases}$$

(si appelle L_1 et L_2 les lignes du système précédent cette ligne correspond à la combinaison $3L_1 + L_2$)

```
Explication :   3L1 : -6x + 9y = -63
                L2 :  6x - 9y =  63
```

Remarques :
- on voulait faire disparaître les x et on s'aperçoit que, sans que ce soit voulu au départ, les y disparaissent aussi
- pour bien comprendre ne pas oublier d'écrire 0y et pas 0 à gauche du signe =

On s'aperçoit qu'on peut donner la valeur qu'on veut à y (car tout nombre y vérifie 0y = 0) mais qu'alors x doit valoir $\frac{-21-3y}{-2}$ soit $\frac{21+3y}{2}$.

Le système admet donc une infinité de solutions : $\begin{cases} x = \frac{21+3y}{2} \\ \text{et} \\ y \text{ quelconque} \end{cases}$

Exemples de solutions : $\begin{cases} x = 12 \\ \text{et} \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 24 \\ \text{et} \\ y = 9 \end{cases}$ etc.

b) Si on utilise la deuxième méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} y = \frac{-21+2x}{3} \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 63 \end{cases}$$

En « injectant » la formule permettant d'exprimer y en fonction de x dans l'équation qu'on a gardée, on obtient :

$6x - 9\frac{-21+2x}{3} = 63$ soit $18x - 9(-21+2x) = 189$ soit $18x - 18x = 189 - 189$ soit $0x = 0$.

On s'aperçoit qu'on peut donner la valeur qu'on veut à x (car tout nombre x vérifie 0x = 0) mais qu'alors y doit valoir $\frac{-21+2x}{3}$.

Le système admet donc une infinité de solutions : $\begin{cases} x \text{ quelconque} \\ \text{et} \\ y = \frac{-21+2x}{3} \end{cases}$

Exemples de solutions : $\begin{cases} x = 12 \\ \text{et} \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 24 \\ \text{et} \\ y = 9 \end{cases}$ etc.

3°) Troisième exemple (deuxième cas particulier correspondant au cas où les deux droites représentant les équations sont strictement parallèles) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 64 \end{cases}$$

a) Si on utilise la première méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 0y = 1 \end{cases}$$

(si appelle L_1 et L_2 les lignes du système précédent cette ligne correspond à la combinaison $3L_1 + L_2$)

Explication :
3L1 : -6x + 9y = -63
L2 : 6x - 9y = 64

Remarques :
- on voulait faire disparaître les x et on s'aperçoit que, sans que ce soit voulu au départ, les y disparaissent aussi
- pour bien comprendre ne pas oublier d'écrire 0y et pas 0 à gauche du signe =

On s'aperçoit que le système n'a pas de solution (car aucun nombre y ne vérifie 0y = 1).

Le système n'admet aucune solution.

b) Si on utilise la deuxième méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} y = \frac{-21+2x}{3} \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 64 \end{cases}$$

En « injectant » la formule permettant d'exprimer y en fonction de x dans l'équation qu'on a gardée, on obtient :

$6x - 9\frac{-21+2x}{3} = 64$ soit $18x - 9(-21+2x) = 192$ soit 18x – 18x = 192 – 189 soit 0x = 3.

On s'aperçoit que le système n'a pas de solution (car aucun nombre x ne vérifie $0x = 3$).

$\boxed{\text{Le système n'admet aucune solution.}}$